$5^{η}$ δεκάδα θεμάτων επανάληψης

41 .

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(3^{α+1}\right)^{x}$, $α \neq -1$

i) Αν το σημείο Μ(1 , 3) βρίσκεται στην γραφική παράσταση της f να βρείτε το α

ii) Αν α = 0 να λύσετε την ανίσωση f(x) + f(2x) > 2

iii) Να λύσετε την εξίσωση f(2ημx) = 3

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού το Μ (1, 3) βρίσκεται στην γραφική παράσταση της f έχουμε

$f(1) = 3 \Leftrightarrow 3 = 3^{α+1} \Leftrightarrow α = 0$

ii)

Αν α = 0 τότε $f(x) = 3^{x}$ οπότε

$f(x) + f(2x) > 2 \Leftrightarrow 3^{x} + 3^{2x} > 2 \Leftrightarrow$

$3^{2x} + 3^{x} - 2 > 0 \Leftrightarrow$ θέτω $3^{x} = y$ **(1)** οπότε

$y^{2} + y - 2 > 0 \Leftrightarrow$ γνωστή διαδικασία $y < -2$ ή $y > 1$

άρα λόγω της **(1)** $3^{x} < -2$ πράγμα αδύνατο ή $3^{x} > 1 \Leftrightarrow 3^{x} > 3^{0} \Leftrightarrow x > 0$

iii)

$f(2ημx) = 3 \Leftrightarrow 3^{2ημx} = 3 \quad \Leftrightarrow$

$$ημx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \quad ημx = ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow$$

$$x = 2kπ + \frac{π}{6} \text{ ή } x = 2kπ + π - \frac{π}{6} = 2kπ + \frac{5π}{6} \text{ , } k \in \mathbb{Z}$$

42.

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11 - \lambda \\ x + 5y - \lambda = 7 \end{cases} \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

i) Δείξτε ότι το σύστημα έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε την λύση του συστήματος

iii) Αν (x , y) είναι η λύση του συστήματος , να βρείτε το λ ώστε το σημείο Α(x , y) να βρίσκεται στην ευθεία 13x + 13 y = 11

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11 - \lambda \\ x + 5y - \lambda = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 11 - \lambda \\ x + 5y = \lambda + 7 \end{cases}$$

$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13 \neq 0$ άρα το σύστημα έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii)

$$D_x = \begin{vmatrix} 11-\lambda & -3 \\ \lambda + 7 & 5 \end{vmatrix} = 55 - 5\lambda + 3\lambda + 21 = -2\lambda + 76$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 2 & 11-\lambda \\ 1 & \lambda + 7 \end{vmatrix} = 2\lambda + 14 - 11 + \lambda = 3\lambda + 3$$

Άρα $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2\lambda + 76}{13}$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{3\lambda + 3}{13}$

iii)

$13x + 13y = 11 \Leftrightarrow -2\lambda + 76 + 3\lambda + 3 = 11 \Leftrightarrow \lambda = -68$

43 .

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x + e^{2x} + k) - \ln\frac{4}{k}$, $g(x) = \sqrt{e^{2x} - 5e^x + 6}$

i) Αν f(0) = ln2 να βρείτε την τιμή του k

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g

iii) Αν k = 2

α) Να λυθεί η εξίσωση $e^{f(x) + \ln 2} = 2g^2(x)$

β) Να δείξετε ότι $\ln[g(\ln 4)] = \frac{1}{4} f(\ln 2)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Περιορισμοί : θα πρέπει $e^x + e^{2x} + k > 0$ και $\frac{4}{k} > 0$ οπότε

$$f(0) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^0 + e^0 + k) - \ln\frac{4}{k} = \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(2 + \alpha) - \ln 4 + \ln k = \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{k(k + 2)}{4} = \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{k^2 + 2k}{4} = 2 \Leftrightarrow$$

$k = 2$ ή $k = -4$ απορρίπτεται λόγω των περιορισμών

ii)

Πρέπει $e^{2x} - 5e^x + 6 \geq 0$ θέτω $e^x = y$ **(1)** οπότε πρέπει

$y^2 - 5y + 6 \geq 0 \Leftrightarrow$ γνωστή διαδικασία $y \leq 2$ ή $y \geq 3$

και λόγω της **(1)**

$e^x \leq 2$ ή $e^x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq \ln 2$ ή $x \geq \ln 3$ άρα

το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το $A_g = (-\infty, \ln 2] \cup [\ln 3, +\infty)$

iii)

Με την προϋπόθεση ότι $x \in A_g$ έχουμε

$e^{f(x) + \ln 2} = 2g^2(x) \Leftrightarrow e^{\ln(e^x + e^{2x} + 2)} = 2(e^{2x} - 5e^x + 6) \Leftrightarrow$

$e^x + e^{2x} + 2 = 2(e^{2x} - 5e^x + 6) \Leftrightarrow e^{2x} - 11e^x + 10 \Leftrightarrow$ γνωστή διαδικασία

$x = 0$ ή $x = \ln 10$ δεκτές και οι δύο τιμές

iv)

Είναι $g(\ln 4) = \sqrt{e^{2\ln 4} - 5e^{\ln 4} + 6} = \sqrt{e^{\ln 16} - 5e^{\ln 4} + 6} =$

$= \sqrt{16 - 20 + 6} = \sqrt{2}$

και $f(\ln 2) = \ln(e^{\ln 2} + e^{2\ln 2} + 2) - \ln 2 =$

$= \ln(2 + 4 + 2) - \ln 2 = \ln 8 - \ln 2 = \ln 4 = 2\ln 2$

Επομένως $\ln[g(\ln 4)] = \ln\sqrt{2}$ και $\frac{1}{4}f(\ln 2) = \frac{1}{4}\cdot 2\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$ άρα

$$\ln[g(\ln 4)] = \frac{1}{4}f(\ln 2)$$

44 .

Έστω η συνάρτηση $f(x) = p\,ημ(ωx)$, $p , ω > 0$

i) Αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 4 και η περίοδος είναι ίση με

$T=\dfrac{2π}{3}$ να βρείτε τις τιμές των p και ω

ii) Για τις τιμές των p και ω του **(i)** ερωτήματος να λυθεί στο διάστημα $[-π,\ π]$ η

εξίσωση $f(x) - συν^2 3x = \dfrac{5}{4}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Γνωρίζουμε ότι $f_{max} = p$ και $T = \dfrac{2π}{ω}$ άρα από την υπόθεση έχουμε

$4 = p$ και $\dfrac{2π}{3} = \dfrac{2π}{ω} \Leftrightarrow ω = 3$

ii)

$$f(x) - συν^2 3x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 4ημ(3x) - συν^2 3x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow$$

$$4ημ(3x) - (1 - ημ^2(3x)) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow$$

$$ημ^2(3x) + 4ημ(3x) - \frac{9}{4} = 0 \quad (2^{ου} \text{ βαθμού με άγνωστο το } ημ(3x)\,)$$

την οποία λύνοντας κατά τα γνωστά βρίσκουμε ότι

$$ημ(3x) = -\frac{9}{2} \text{ που είναι αδύνατη ή } ημ(3x) = \frac{1}{2}$$

Τώρα $\quad ημ(3x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow ημ(3x) = ημ\left(\dfrac{π}{6}\right) \Leftrightarrow$

$$3x = 2kπ + \frac{π}{6} \text{ ή } 3x = 2kπ + π - \frac{π}{6} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2kπ}{3} + \frac{π}{18} \text{ ή } x = \frac{2kπ}{3} + \frac{5π}{18} \ , k \in \mathbb{Z}$$

επειδή θέλουμε τις λύσεις στο διάστημα $[-π,\ π]$ από τον πρώτο τύπο έχουμε

$-π \le \dfrac{2kπ}{3} + \dfrac{π}{18} \le π \Leftrightarrow \ldots\ldots \Leftrightarrow -\dfrac{19}{12} \le k \le \dfrac{17}{12}$ και επειδή $k \in \mathbb{Z}$ είναι $k = -1 , 0 , 1$

Για αυτές τις τιμές του k προκύπτουν οι λύσεις $x = -\dfrac{11π}{18}$, $x = \dfrac{π}{18}$, $x = \dfrac{13π}{18}$

Ομοίως από τον δεύτερο τύπο βρίσκουμε $\quad x = -\dfrac{7π}{18}$, $x = \dfrac{5π}{18}$, $x = \dfrac{17π}{18}$

45.

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases}(2-\lambda)x + y = \lambda + 4\\ (\lambda + 4)x + (3\lambda + 2)y = -7\lambda + 8\end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

i) Ν βρείτε τις ορίζουσες D , D_x , D_y αυτού

ii) Για τις διάφορες τιμές του λ να λύσετε και να διερευνήσετε το σύστημα

Προτεινόμενη λύση

i)

$$D = \begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ \lambda + 4 & 3\lambda + 2\end{vmatrix} = (2-\lambda)(3\lambda+2) - (\lambda + 4) = -3\lambda(\lambda - 1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix}\lambda + 4 & 1\\ -7\lambda + 8 & 3\lambda + 2\end{vmatrix} = (\lambda + 4)(3\lambda+2) - (-7\lambda + 8) = 3\lambda(\lambda + 7)$$

$$D_y = \begin{vmatrix}2-\lambda & \lambda + 4\\ \lambda + 4 & -7\lambda + 8\end{vmatrix} = (2-\lambda)(-7\lambda+8) - (\lambda + 4)^2 = 6\lambda(\lambda - 5)$$

ii)

Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ το σύστημα έχει μία μόνο λύση την

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda + 7}{1-\lambda} \text{ και } y = \frac{D_y}{D} = \frac{2(\lambda - 5)}{1-\lambda}$$

αν $\lambda = 0$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases}2x + y = 4\\ 4x + 2y = 8\end{cases}$$ το οποίο ισοδυναμεί με την εξίσωση $2x + y = 4 \Leftrightarrow y = 4 - 2x$

η οποία έχει άπειρες λύσεις τις $(x, y) = (x, 4-2x)$, $x \in \mathbb{R}$ και

αν $\lambda = 1$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases}x + y = 5\\ 5x + 5y = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x + y = 5\\ x + y = \frac{1}{5}\end{cases}$$ το οποίο είναι φανερά αδύνατο

46.

Έστω τα πολυώνυμα

$Q(x) = (\ln k - 1)x^3 + (\ln^2 k - 1)x^2 + (k - e)x + k^2 - e^2$ και $P(x) = x^3 + \gamma x^2 - 4x + 4$

i) Να βρείτε τις τιμές των k και γ ώστε το Q(x) να είναι το μηδενικό και το P(x) να έχει παράγοντα το $x - 2$

ii) Για τις τιμές των k και γ που θα προσδιορίσετε

α) Να βρείτε τις τιμές του x ώστε η γραφική παράσταση του P(x) να είναι ψηλότερα από την γραφική παράσταση του Q(x)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 5^{\ln k^2} + 10^{\log(-\gamma)}$

Προτεινόμενη λύση

i)

Θα πρέπει να ισχύουν

$\ln k - 1 = 0$ και $\ln^2 k - 1 = 0$ και $k - e = 0$ και $k^2 - e^2 = 0$ και $P(2) = 0$ απ' όπου προκύπτει ότι $k = e$ και $\gamma = -1$

ii)

α) . Για $k = e$ και $\gamma = -1$ τα πολυώνυμα γίνονται $Q(x) = 0$ και $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ για να είναι η γραφική παράσταση του P(x) ψηλότερα από την γραφική παράσταση του Q(x) πρέπει $P(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0$

Η εξίσωση $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ εύκολα βρίσκουμε ότι έχει ρίζες τις -2 , 1 , 2

Το πρόσημο του P(x) φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$ -2 1 2 $+\infty$
Πρόσημο P(x)	$-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι $P(x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$ ή $x > 2$

β) . $A = 5^{\ln k^2} + 10^{\log(-\gamma)} = 5^{\ln e^2} + 10^{\log 1} = 5^{2\ln e} + 10^{\log 1} = 5^2 + 10^0 = 26$

47.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = k\ln(20-e^x) - \lambda\ln(e^x-2)$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

ii) Αν $f(\ln 3) = \ln 17$ και $f(\ln 19) + \ln 17 = 0$ να βρείτε τις τιμές των k και λ

iii) Αν $k = 1$ και $\lambda = 1$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2x - \ln 2$

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 1$

Προτεινόμενη λύση

i)

Πρέπει $(20-e^x > 0 \text{ και } e^x - 2 > 0) \Leftrightarrow (e^x < 20 \text{ και } e^x > 2) \Leftrightarrow$

$x < \ln 20$ και $x > \ln 2$ συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = (\ln 2, \ln 20)$

ii)

$$f(\ln 3) = \ln 17 \Leftrightarrow k\ln(20-e^{\ln 3}) - \lambda\ln(e^{\ln 3}-2) = \ln 17 \Leftrightarrow$$

$$k\ln(20-3) - \lambda\ln(3-2) = \ln 17 \Leftrightarrow$$

$$k\ln 17 - \lambda\ln 1 = \ln 17 \Leftrightarrow k = 1$$

$$f(\ln 19) + \ln 17 = 0 \Leftrightarrow k\ln(20-e^{\ln 19}) - \lambda\ln(e^{\ln 19}-2) + \ln 17 = 0 \Leftrightarrow$$

$$k\ln(20-19) - \lambda\ln(19-2) + \ln 17 = 0 \Leftrightarrow$$

$$k\ln 1 - \lambda\ln 17 + \ln 17 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

iii)

Για $k = 1$ και $\lambda = 1$ είναι $f(x) = \ln(20-e^x) - \ln(e^x-2)$ οπότε

με την προϋπόθεση ότι $x \in A_f$ έχουμε ότι

α) . $f(x) = 2x - \ln 2 \Leftrightarrow \ln(20-e^x) - \ln(e^x-2) = 2x - \ln 2 \Leftrightarrow$

$$\ln(20-e^x) - \ln(e^x-2) = \ln e^{2x} - \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{20-e^x}{e^x-2} = \ln\frac{e^{2x}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{20-e^x}{e^x-2} = \frac{e^{2x}}{2} \Leftrightarrow$$

$e^{3x} - 2e^{2x} + 2e^x - 40 = 0$ οπότε θέτοντας $e^x = y$ **(1)** βρίσκουμε

$$y^3 - 2y^2 + 2y - 40 = 0$$

εξίσωση η οποία με Horner διαπιστώνουμε ότι έχει μοναδική ρίζα την $y = 4$ και

συνεπώς λόγω της **(1)** $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$ ρίζα δεκτή

β) . $f(x) < 1 \Leftrightarrow \ln(20-e^x) - \ln(e^x-2) < 1 \Leftrightarrow$

$$\ln\frac{20-e^x}{e^x-2} < \ln e \Leftrightarrow$$

$$\frac{20-e^x}{e^x-2} < e \text{ και επειδή } e^x - 2 > 0$$

$$20-e^x < e(e^x-2) \Leftrightarrow$$

$$20 + 2e < (e+1)\,e^x \Leftrightarrow \text{ και επειδή } e + 1 > 0$$

$$e^x > \frac{20+2e}{e+1} \Leftrightarrow x > \ln\frac{20+2e}{e+1}$$

Δεκτές τιμές είναι όσες ανήκουν στο A_f

Επειδή $2 < \dfrac{20+2e}{e+1} < 20 \Leftrightarrow 2e + 2 < 20 + 2e < 20e + 20 \Leftrightarrow$

$$2 < 20 < 18e + 20 \quad \text{η οποία ισχύει}$$

θα είναι $\ln 2 < \ln\dfrac{20+2e}{e+1} < \ln 20$ οπότε λύσεις της ανίσωσης είναι οι τιμές του

διαστήματος $\left[\ln\dfrac{20+2e}{e+1},\ \ln 20\right]$

48.

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $\eta\mu x\,(1+\sigma\upsilon\nu x)+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\eta\mu\dfrac{\pi}{4}$

ii) $3\eta\mu^2 x-4\sigma\upsilon\nu^2 x=3$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\eta\mu x\,(1+\sigma\upsilon\nu x)+\frac{1}{\sqrt{2}}=\eta\mu\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow \eta\mu x\,(1+\sigma\upsilon\nu x)+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x\,(1+\sigma\upsilon\nu x)=0\Leftrightarrow \eta\mu\, x=0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x=-1$$

- $\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu 0 \Leftrightarrow x=2k\pi$ ή $x=2k\pi+\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu x=-1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow x=2k\pi+\pi$ ή $x=2k\pi-\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

ii)

$$3\eta\mu^2 x-4\sigma\upsilon\nu^2 x=3\Leftrightarrow 3\eta\mu^2 x-4\,(1-\eta\mu^2 x)=3\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 x=1\Leftrightarrow \eta\mu\, x=1 \text{ ή } \eta\mu x=-1$$

- $\eta\mu x=1 \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$
- $\eta\mu x=-1\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow x=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ ή $x=2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

49.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (4^k - 2\cdot 2^{k+1} + 4)x^4 + x^3 - 2x^2 + (2k+1)x - 4k - 2$, $k \in \mathbb{R}$

i) Να προσδιορίσετε την τιμή του k ώστε το πολυώνυμο να είναι 3^{ου} βαθμού

ii) Αν $k = 1$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln[P(x)]$

β) Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) :(x-2)$ να λύσετε την εξίσωση $\pi(\ln x) = 6 - 2\ln x$

Προτεινόμενη λύση

i)

Θα πρέπει $4^k - 2\cdot 2^{k+1} + 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{2k} - 2\cdot 2\cdot 2^k + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$2^{2k} - 4\cdot 2^k + 4 = 0 \Leftrightarrow (2^k - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2^k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

ii)

Για $k = 1$

α) Έχουμε $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

Για να ορίζεται η f θα πρέπει $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 > 0 \Leftrightarrow$

$x^2(x-2) + 3(x-2) > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 3) > 0$ **(1)** $\Leftrightarrow x > 2$

β) Από την **(1)** προκύπτει ότι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) :(x-2)$ είναι $\pi(x) = x^2 + 3$ οπότε με $x > 0$ έχουμε

$\pi(\ln x) = 6 - 2\ln x \Leftrightarrow \ln^2 x + 3 = 6 - 2\ln x \Leftrightarrow$

$\ln^2 x + 2\ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow$ (2^{ου} βαθμού με άγνωστο το $\ln x$)

$\ln x = 1$ ή $\ln x = -3 \Leftrightarrow x = e$ ή $x = e^{-3}$ δεκτές και οι δύο τιμές

50.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1-x-\ln x$

i) Δείξτε ότι αν $0< x < 1$ τότε $f(x) > 0$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln^2 x - x + 1$

iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x) > 1-3^x-x$

iv) Αν $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ να δείξετε ότι $ημθ < \ln\left(\frac{e}{ημθ}\right)$

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού $0 < x < 1 \quad \Rightarrow 1-x > 0 \quad (1)$ και

$$\ln x < \ln 1 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \ (2)$$

προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε

$$1-x-\ln x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

ii)

Με $x > 0$ έχουμε

$$f(x) = \ln^2 x - x + 1 \Leftrightarrow 1-x-\ln x = \ln^2 x - x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln^2 x + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln x = 0 \text{ ή } \ln x = -1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = e^{-1}$$ ρίζες δεκτές

iii)

$$f(e^x) > 1-3^x-x \Leftrightarrow 1-e^x-\ln e^x > 1-3^x-x \Leftrightarrow$$

$$1-e^x-x > 1-3^x-x \Leftrightarrow$$

$$e^x < 3^x \Leftrightarrow$$

$$\ln e^x < \ln 3^x \Leftrightarrow$$

$$x\ln e < x\ln 3 \Leftrightarrow$$

$$x(\ln 3-\ln e) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$ δεδομένου ότι $\ln 3 > \ln e$

iv)

$$ημθ < \ln\left(\frac{e}{ημθ}\right) \Leftrightarrow ημθ < \ln e - \ln(ημθ) \Leftrightarrow$$

$$ημθ < 1 - \ln(ημθ) \Leftrightarrow$$

$$1 - ημθ - \ln(ημθ) > 0 \quad \textbf{(1)}$$

επειδή όμως $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $0 < ημθ < 1$ συνεπώς η **(1)** δίνει

$f(ημθ) > 0$ πράγμα που ισχύει από το **(i)** ερώτημα